FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Física

Física I -2009/2010

7ª Série - Oscilações - Resolução

Questões:

Q1 - Será que a amplitude A e a constante na fase ϕ de um oscilador, podem ser determinadas, se apenas for especificada a posição no instante $t = 0$? Explique.

Q2 - Uma massa ligada a uma mola tem um movimento harmónico simples com amplitude A. Será que a energia total varia se a massa duplicar mas a amplitude se mantiver? As energias cinética e potencial dependem da massa? Explique.

Q3 - Uma massa é pendurada numa mola segundo a vertical e é posta em oscilação. Porque é que o seu movimento acaba por parar?

Q4 - Um relógio de pêndulo está atrasado. Como se deveria ajustar o comprimento do pêndulo para acertar as horas?

Problemas:

P1 - Uma partícula move-se ao longo do eixo dos x com movimento harmónico simples, tendo partido da origem no instante $t = 0$ deslocando-se para a direita. A amplitude do movimento é $2.00\,\mathrm{cm}$ e a frequência é $1.50\,\mathrm{Hz}$.

a) Escreva a equação para o deslocamento.

b) Determine a velocidade máxima e o primeiro instante em que a partícula atinge essa velocidade; faça o mesmo para a aceleração.

c) Qual a distância total percorrida no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 1.00\,\mathrm{s}$.

a) A equação do movimento, que exprime a coordenada de posição em função do tempo, é do tipo

$$x = A\cos(\omega t + \phi),$$

em que A é a amplitude, ω é a frequência angular e ϕ a constante de fase. $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 1.50\,\mathrm{Hz} = 9.42\,\mathrm{rad/s}$; $A = 2.00\,\mathrm{cm}$. Como $x(0\,\mathrm{s}) = 0.0\,\mathrm{cm}$, vem

$$x(0) = A\cos\phi = 0$$

e $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\phi = \dfrac{3\pi}{2}$. A escolha entre estes dois valores para a constante de fase é determinada pela indicação de que no instante inicial, a velocidade é positiva (se para $t = 0$ a partícula se desloca para a direita, a velocidade nesse instante tem o sentido positvo dos eixo dos x e é, portanto, positiva). A velocidade, em função dotempo, é dada por

$$\begin{aligned} v &= dx/dt \\ &= -A\omega\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

e, para $t = 0$,

$$v(0) = -A\omega\sin\phi$$

Se $v(0) > 0$, então $\sin\phi < 0$ e portanto, $\phi = \dfrac{3}{2}\pi$. A equação do movimento é assim,

$$x = 2.00 \times \cos\left(9.42\,\mathrm{rad/\,s} \times t + \frac{3}{2}\pi\right)\ \mathrm{cm}.$$

b) Como a velocidade é

$$v = (-2.00 \times 9.4)\sin\left(9.42t + \frac{3}{2}\pi\right)\ \mathrm{cm/\,s},$$

o valor máximo da velocidade é

$$\begin{aligned} v_{\max} &= (2.00 \times 9.42)\ \mathrm{cm/\,s} \\ &= 1.88 \times 10\,\mathrm{cm/\,s}. \end{aligned}$$

O 1^o instante em que a partícula atinge este valor corresponde à primeira passagem pela origem com velocidade positiva (sem contar o instante inicial). Esse instante corresponde a um intervalo de tempo igual a um período, isto é,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{1.5\,\mathrm{Hz}} \\ &= 0.67\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

A aceleração é

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

sendo o seu valor máximo dado por

$$\begin{aligned} a_{\max} &= A\omega^2 \\ &= \left(2.00 \times 9.\,42^2\right)\ \mathrm{cm/\,s^2} \\ &= 1.77 \times 10^2\,\mathrm{cm/\,s^2}. \end{aligned}$$

Este valor é obtido quando

$$\begin{aligned} -A\omega^2\cos\left(9.42\,\mathrm{rad/\,s} \times t + \frac{3}{2}\pi\right) &= A\omega^2 \\ \cos\left(9.42\,\mathrm{rad/\,s} \times t + \frac{3}{2}\pi\right) &= -1 \\ 9.42\,\mathrm{rad/\,s} \times t + \frac{3}{2}\pi &= 3\pi \\ t &= \frac{1.5\pi}{9.42} \\ &= 0.50\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

c) Durante um período a partícula percorre uma distância igual a 4 vezes a amplitude, durante 1.0 s percorrerá

$$\begin{aligned} D &= 4A \times \frac{1}{T} \\ &= \left(4 \times 2.00 \times \frac{1}{0.67}\right)\ \mathrm{cm} \\ &= 12\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

P2 - Uma bola deixada cair de uma altura de $4.00\,\mathrm{m}$ colide de uma forma perfeitamente elástica com o solo. Presuma que não há perda de energia devido à resistência do ar.

a) Mostre que o movimento é periódico.

b) Determine o período do movimento.

c) O movimento é harmónico simples? Explique.

a) Na descida, e com origem do referencial no ponto em que a bola bate no solo, a equação do movimento é

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

A velocidade da bola ao atingir o solo é dada por

$$v = \sqrt{2gh}$$

O tempo de descida é dado por t_{desc}, em que

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_{\mathrm{desc}}^2$$

ou

$$t_{\mathrm{desc}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A equação para a subida é

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

em que v é igual ao valor da velocidade da bola ao atingir o solo, isto é, $v_0 = \sqrt{2gh}$. Utilizando esta última equação, podemos obter o tempo de subida, t_{sub}:

$$h = \sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2$$

e

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{sub}} &= \frac{\sqrt{2gh} \pm \sqrt{2gh - 2gh}}{g} \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_{\mathrm{desc}} \end{aligned}$$

Para que o movimento seja efectivamente periódico é necessário que todas as suas características (neste caso, posição e velocidade) se repitam em intervalos de tempo iguais (dos quais o menor será o período). Sabemos que efctivamente isto acontece no movimento que estamos a estudar e por isso ele é periódico.

b) O tempo de subida é igual ao tempo de descida. Este resultado sugere que o período do movimento será $T = 2t_{\mathrm{sub}}$.

c) a equação do movimento é

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{g} \\ &= m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \end{aligned}$$

ou, com o eixo dos y dirigido para cima,

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \\ \frac{d^2y}{dt^2} + g &= 0 \end{aligned}$$

e o movimento *não é* harmónico simples (porque a respectiva equação não é do tipo $\frac{d^2y}{dt^2} + Cy = 0$, com $C = \text{const.}$).

P3 - Um corpo com massa $2.00\,\text{kg}$ está ligado a uma mola e encontra-se sobre uma superfície horizontal. É necessária uma força horizontal de $20.0\,\text{N}$ para manter o corpo em repouso quando este é puxada $0.200\,\text{m}$ da posição de equilíbrio (a origem do eixo dos x). O corpo é largado do repouso com um deslocamento inicial $x_0 = 0.200\,\text{m}$, e subsequentemente realiza oscilações harmónicas simples. Determine:

a) a constante de força da mola;

b) a frequência das oscilações;

c) a energia total do sistema;

d) a velocidade, a aceleração, a energia cinética e a energia potencial, quando o deslocamento é igual a um-terço do seu valor máximo.

a) A constante da mola obtem-de de $F = kx$, em que F é o valor absoluto da força que um agente exterior tem de efectuar sobre a mola quando esta é puxada de x da posição de equilíbrio. Assim

$$\begin{aligned} k &= \frac{F}{x} \\ &= \frac{20.0\,\text{N}}{0.200} \\ &= 100\,\text{N/m}. \end{aligned}$$

b) A frequência das oscilações é $\nu = \omega/2\pi$, em que $\omega = \sqrt{k/m}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{100\,\text{N/m}}{2.00\,\text{kg}}}}{2\pi} \\ &= 1.13\,\text{Hz}. \end{aligned}$$

c) A energia total do sistema é dada pela soma da energia cinética da massa com a energia potencial da mola, isto é,

$$\begin{aligned} E_\text{C} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}A^2k\left(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}A^2k \\ &= \frac{1}{2} \times (0.200\,\text{m})^2 \times 100\,\text{N/m} \\ &= 2.00\,\text{J} \end{aligned}$$

d) A posição e a velocidade da massa são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \phi) \\ v &= -A\omega\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

No instante inicial ($t = 0$), temos $x = A$ e $v = 0$, de onde

$$\begin{aligned} A\cos\phi &= A \\ -A\omega\sin\phi &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\phi = 0\,\mathrm{rad}$$

e a equação do movimento é

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ &= (0.200\cos 2.26\pi t)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Se o deslocamento é igual a um terço do seu valor máximo então

$$\begin{aligned} \frac{0.200\,\mathrm{m}}{3} &= 0.200\,\mathrm{m}\times\cos 2.26\pi t \\ 2.26\pi t &= \arccos\frac{1}{3} \\ t &= 0.173\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Nesse instante a velocidade é

$$\begin{aligned} v &= -A\omega\sin\omega t \\ &= -0.200\,\mathrm{m}\times(2.26\pi)\ \mathrm{rad/\,s}\times\sin\left[(2.26\pi)\ \mathrm{rad/\,s}\times 0.173\,\mathrm{s}\right] \\ &= -1.34\,\mathrm{m/\,s}. \end{aligned}$$

e a aceleração

$$\begin{aligned} a &= -A\omega^2\cos\omega t \\ &= -0.200\,\mathrm{m}\times\left[(2.26\pi)\ \mathrm{rad/\,s}\right]^2\cos\left[(2.26\pi)\ \mathrm{rad/\,s}\times 0.173\,\mathrm{s}\right] \\ &= -3.39\,\mathrm{m/\,s^2}. \end{aligned}$$

A energia cinética é

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{2}\times 2.00\,\mathrm{kg}\times(-1.34\,\mathrm{m/\,s})^2 \\ &= 1.80\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

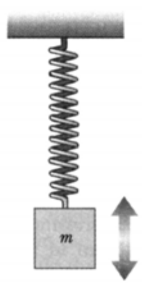
e a enrgia potencial

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{2}\times 100\,\mathrm{N/\,m}\times\left(\frac{1}{3}\times 0.200\,\mathrm{m}\right)^2 \\ &= 0.222\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

P4 - Um corpo de massa m oscila livremente estando pendurado numa mola vertical, como se mostra na figura. Quando $m = 0.810\,\mathrm{kg}$ o período é $0.910\,\mathrm{s}$. Outro corpo de massa desconhecida pendurado na mesma mola tem um período de $1.16\,\mathrm{s}$. Determine:

a) a constante da mola;

b) a massa desconhecida.



a) Com uma massa m suspensa, a mola oscila em torno da posição de equilíbrio (obtida de $mg = ky_0$, isto é $y_0 = \frac{mg}{k}$) com frequência angular dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, em que k é a constante da mola. O período é, portanto, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$. A constante da mola obtem-se a partir desta última relação:

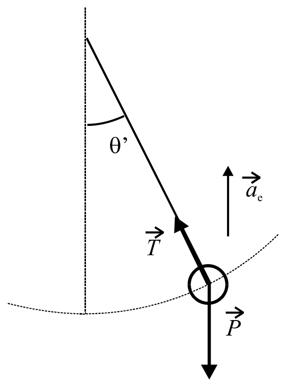
$$\begin{aligned}
\sqrt{k/m} &= \frac{2\pi}{T} \\
\frac{k}{m} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\
k &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\
&= 0.810\,\mathrm{kg} \times \left(\frac{2\pi}{0.910\,\mathrm{s}}\right)^2 \\
&= 38.6\,\mathrm{N/m}.
\end{aligned}$$

b) A massa desconhecida, m', obtem-se agora de

$$\begin{aligned}
m' &= k\left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 \\
&= 38.6\,\mathrm{N/m} \times \left(\frac{1.16\,\mathrm{s}}{2\pi}\right)^2 \\
&= 1.32\,\mathrm{kg}.
\end{aligned}$$

P5 - Um pêndulo simples tem $5.0\,\mathrm{m}$ de comprimento. Qual o período do movimento harmónico simples deste pêndulo se ele estiver pendurado num elevador que se desloca:
a) Para cima com aceleração de módulo $5.0\,\mathrm{m/s^2}$,
b) Para baixo com aceleração de módulo $5.0\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Considere-se a figura.



As forças que actuam no corpo são o seu peso $\vec{P}$ e a tensão do fio $\vec{T}$. A equação que exprime a 2.ª lei de Newton é, neste caso,

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m\left(\vec{a}' + \vec{a}_e\right),$$

em que $\vec{a}'$ é a aceleração do corpo quando a aceleração do elevador ($\vec{a}_e$) é nula. Esta equação pode ser escrita na forma

$$\vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e = m\vec{a}',$$

cujas componentes segundo a direcção radial (dirigida para o centro da trajectória) e segundo a direcção tangencial são

$$\begin{aligned} -mg\sin\theta' - ma_{\mathrm{e}}\sin\theta' &= ma'_{\mathrm{t}} \\ T - mg\cos\theta' - ma_{\mathrm{e}}\cos\theta' &= ma'_{\mathrm{n}} \end{aligned}$$

e obtemos

$$-m\left(g + a_{\mathrm{e}}\right)\sin\theta' = m\ell\frac{d^2\theta'}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{(g + a_{\mathrm{e}})}{\ell}\sin\theta' = 0.$$

Aqui, ℓ é o comprimento do pêndulo. Para valores de θ' pequenos, $\sin\theta' \simeq \theta'$ e atingimos uma equação de oscilador harmónico simples

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{(g + a_{\mathrm{e}})}{\ell}\theta' = 0.$$

A frequência angular da oscilação será

$$\omega = \sqrt{\frac{(g + a_{\mathrm{e}})}{\ell}}$$

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + a_{\mathrm{e}}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\mathrm{m}}{(10 + 5)\ \mathrm{m/\,s^2}}} \\ &= 3.63\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g''}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - a_{\mathrm{e}}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\mathrm{m}}{(10 - 5)\ \mathrm{m/\,s^2}}} \\ &= 6.3\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

P6 - A roda de uma balança de relógio tem um período de oscilação de $0.250\,\mathrm{s}$. A roda tem massa de $20.0\,\mathrm{g}$ concentrada num aro com raio $0.500\,\mathrm{cm}$. Determine:

a) o momento de inércia da roda;

O momento de inércia da roda é

$$\begin{aligned} I &= MR^2 \\ &= 2.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \times \left(5.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2 \\ &= 5.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

b) a constante de torção da mola associada.

Utilizamos a equação
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{K}\theta,$$
em que $\mathcal{K}$ é a constante de torção da mola associada. A expressão da frequência angular do movimento é
$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{I}},$$
pelo que o período é
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathcal{K}}}.$$
A constante de torção é, então,
$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{4\pi^2 I}{T^2}\\ &= \frac{4\pi^2 5.0\times10^{-7}\,\mathrm{kg\,m^2}}{(0.250\,\mathrm{s})^2}\\ &= 3.16\times10^{-4}\,\mathrm{N\,m}\end{aligned}$$